PROVA 7
TEOREMA DI ROLLE

Il problema si risolve attraverso applicando il Teorema di Rolle per le funzioni continue e derivabili. Studiando la funzione ottenuta, dopo aver calcolato il valore del parametro k, si traccia il grafico della funzione. Un integrale definito calcola il valor medio della funzione. I coefficienti angolari, di due rette tangenti in due punti della funzione e simmetrici rispetto all'origine, sono uguali.

PROBLEMA

Trova il valore di k affinché la funzione reale f(x) di variabile reale

$$f(x) = \frac{x}{k + x^2}$$

verifichi il teorema di Rolle, nell'intervallo [1;4].
A) Studia la funzione f(x) e tracciane il grafico
B) Calcola il valor medio della funzione nell'intervallo [1;4]
C) Verifica che due punti sulla funzione e simmetrici rispetto l'origine hanno le tangenti parallele.

SVOLGIMENTO PROBLEMA

La funzione reale f(x) di variabile reale

$$f(x) = \frac{x}{k + x^2}$$

verifica il teorema di Rolle, nell'intervallo [1;4], se essa è continua in [1;4] e derivabile in]1;4[, inoltre deve risultare che f(1) = f(4), pertanto

$$f(1) = f(4) \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{k+1^2} = \frac{4}{k+4^2} \quad \longrightarrow \quad 4k - k = 16 - 4$$
$$\longrightarrow \quad k = 4$$

$$f(x) = \frac{x}{4+x^2}$$

che risulta anche continua e derivabile in R, quindi continua in [1;4] e derivabile in]1;4[.

A) la funzione è continua e derivabile in tutto R ed ha un solo punto di intersezione con gli assi O(0;0), inoltre dallo studio del segno risulta che è positiva solo per $x > 0$.
Lo studio della derivata prima $f'(x) > 0$

$$f'(x) = \frac{4+x^2 - x(2x)}{(4+x^2)^2} = \frac{4-x^2}{(4+x^2)^2} > 0$$

ci controlla la crescenza di f(x) nell'intervallo $-2 < x < 2$ e quindi la decrescenza per valori esterni a detto intervallo. C'è un massimo per $x = -2$ ed un minimo per $x = 2$, inoltre la funzione è dispari, poiché $f(-x) = f(x)$ e quindi f(x) è simmetrica rispetto all'origine O ed ha un asintoto orizzontale

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{4+x^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad y = 0 \text{ asintoto orizzontale}$$

coincidente con l'asse x.
Lo studio della derivata seconda $f''(x) > 0$

$$f''(x) = \frac{2x(4+x^2)^2 - (4-x^2)2(4+x^2)(2x)}{(4+x^2)^4} =$$

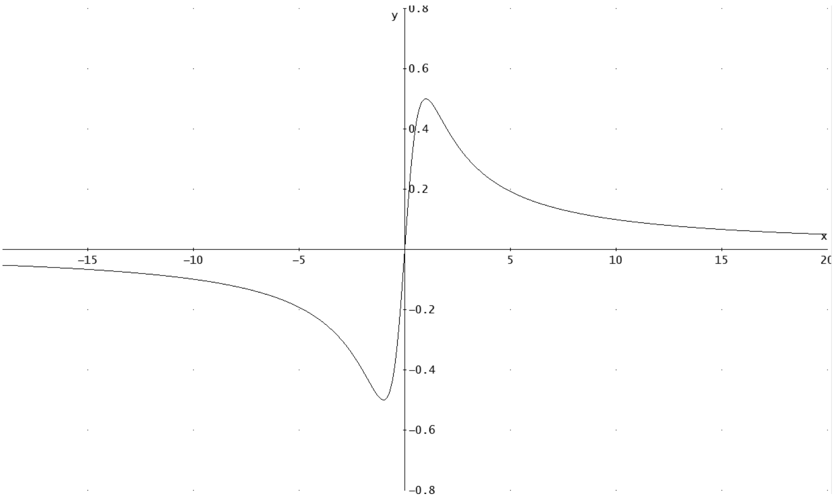
$$= \frac{-2x(4+x^2)[(4+x^2) + 2(4-x^2)]}{(4+x^2)^4} > 0$$

ci controlla la concavità verso l'alto di f(x) negli intervalli $-2\sqrt{3} < x < 0$

e $x > 2\sqrt{3}$ e la concavità verso ilo basso nella restante parte $x < -2\sqrt{3}$ e $0 < x < -2\sqrt{3}$, pertanto la funzione ha tre flessi nei punti

$$x = -2\sqrt{3},\ x = 0,\ x = -2\sqrt{3}.$$

Il grafico è il seguente



B) Il valor medio della funzione relativamente all'intervallo [-2;2] si calcola con la nota formula

$$V_{m[a.b]} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$V_{m[-2.2]} = \frac{1}{2+2}\int_{-2}^{2}\frac{x}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\frac{2x}{4+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\ln(4+x^2)\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\ln(4+4) - \ln(4+4)\right] = 0$$

il valor medio è nullo considerata la disparità della funzione, inoltre il valore z che annulla la funzione f(x) = 0 risulta banalmente x = 0.

C) Consideriamo due punti della funzione P(x;y) e Q(-x;-y) i rispettivi coefficienti angolari delle rette tangenti coincidono, infatti

$$f'(x) = \frac{4 - x^2}{(4 + x^2)^2} = \frac{4 - (-x)^2}{(4 + (-x)^2)^2} = f'(-x)$$

pertanto, le tangenti sono parallele.

QUESTIONARIO

ES1) Calcola per quale valore di $n \in N$, i coefficienti binomiali

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$$

sono termini di una progressione geometrica.

ES2) Il candidato illustri le principali caratteristiche di quelli che vengono definiti **solidi platonici** e del perché sono soltanto cinque.

ES3) Verifica che l'equazione $x \cdot 2^x = 1$ ha almeno una radice positiva minore di 1.

ES4) Determina il valor medio della funzione

$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$ nell'intervallo [3;6].

SVOLGIMENTO QUESTIONARIO

ES1) Calcoliamo i rapporti di ogni termine con il precedente e li uguagliamo fra loro:

$$\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{1}} = \frac{\binom{n}{3}}{\binom{n}{2}}$$

applicando la definizione di coefficiente binomiale risulta che

$$\frac{\frac{n!}{2!(n-2)!}}{\frac{n!}{1!(n-1)!}} = \frac{\frac{n!}{3!(n-3)!}}{\frac{n!}{2!(n-2)!}}$$

da cui semplificando si ha che

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n} = \frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}{\frac{n(n-1)}{2}}$$

e quindi $\frac{n-1}{2} = \frac{n-2}{3}$ pertanto la soluzione n = – 1 non è accettabile, perché non è un numero naturale n >3.

ES2) Le facce di un **poliedro regolare** sono poligoni regolari tutti congruenti fra loro, come i diedri che si vengono a formare sono tutti congruenti fra loro. Tali **solidi** vengono anche detti **Platonici**, dal nome del noto filosofo greco, il quale affianco ad ogni solido l'idea di uno dei cinque elementi di cui secondo l'epoca era fatta la materia (aria, acqua, fuoco, terra ed etere).

F = numero delle facce, V = numero dei vertici, S = numero degli spigoli, L = lato di una faccia.