7. Figure geometriche nel piano e nello spazio

La geometria euclidea nello spazio,
La geometria solida si occupa delle figure che hanno un'**estensione spaziale**. Nella geometria intuitiva della realtà troviamo numerosissimi spunti di riflessione. Il paracadute e la vela di una barca sono semplici esempi di **superfici curve** utili alla vita dell'uomo, mentre la superficie dell'acqua costituisce una **superficie piana** se gli agenti atmosferici non la cambiano. In agricoltura l'uomo lavora da sempre con le superfici piane, in particolare per poter seminare, irrigare, recingere e raccogliere i frutti della terra. Nell'architettura si trovano spessissimo superfici curve, come le volte (a botte o a crociera) e le cupole (semisfera) che mostrano un utilizzo pratico ed al tempo stesso decorativo delle superfici curve.
Tra queste figure solide ci sono i **Poliedri** che sono solidi aventi la superficie costituita da poligoni posti su piani diversi e tali da avere ogni lato in comune con un altro poligono. Un esempio sono il prisma, il parallelepipedo, il cubo, la piramide ed il tronco di piramide. Un **poliedro** è la regione finita di spazio che ha per facce un numero finito di poligoni disposti in modo che ogni lato appartenga a due dei poligoni coinvolti.
Un **angoloide** è lo spazio compreso tra le superfici (le facce) individuate da una serie di semirette (gli spigoli) con origine comune in un punto V (il vertice). Un diedro è l'angoloide formato da tre spigoli e tre facce.

Un'altra tipologia di solidi sono i **corpi rotondi o solidi di rotazione o di rivoluzione**, ottenuti ruotando attorno ad un'asse una figura piana. Un esempio sono il cono (rotazione di un triangolo attorno ad un suo cateto), il cilindro (rotazione di un rettangolo intorno ad una delle sue due dimensioni) e la sfera (rotazione di una semicirconferenza intorno al suo diametro).
Due solidi si dicono **equivalenti o equivolumetrici** se hanno lo stesso volume.
Principio di Cavalieri: <u>Due solidi di uguale altezza sono equivalenti quando esiste un fascio di piani paralleli, che intersecando i due solidi, determinano sezioni piane equivalenti tra loro.</u>
Una famosa conseguenza di questo principio è l'equivalenza tra la sfera e l'anticlessidra, questa nota equivalenza ha permesso di calcolare il volume di una sfera $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ con r raggio della sfera.
Per **anticlessidra** si intende la differenza di volumi tra il cilindro che contiene la sfera ed il doppio cono contenuto all'interno del cilindro. Riguardo alle formule di calcolo delle superfici e volumi dei solidi menzionati, si rimanda ai testi di uso scolastico.
Solidi platonici
Le facce di un **poliedro regolare** sono poligoni regolari tutti congruenti fra loro, come i diedri che si vengono a formare sono tutti congruenti fra loro. Tali solidi vengono anche detti Platonici, dal nome del noto filosofo greco, il quale affianco ad ogni solido l'idea di uno dei cinque elementi di cui secondo l'epoca era fatta la materia (aria, acqua, fuoco, terra ed etere).

F = numero delle facce,
V = numero dei vertici,
S = numero degli spigoli,

L = lato di una faccia.

Si noti che sussiste la famosa **formula di Eulero F + V = S + 2**, mette in relazione F, S, V. I solidi Platonici sono **solo cinque** in quanto ad vertice possono legarsi un certo numero di angoli la cui somma non può superare i 360°.

- Se utilizziamo **triangoli regolari** ad un vertice posso associare 3 angoli (tetraedro) la cui somma è $60°\cdot 3 = 180°$, 4 angoli (Ottaedro) la cui somma è $60°\cdot 4 = 240°$, o al massimo 5 (Icosaedro) la cui somma è $60°\cdot 5 = 180°$. Se associo 6 triangoli equilateri ad un vertice ottengo 360° formando quindi un piano, pertanto non è possibile costruire il solido.
- Se utilizziamo **quadrati** ad un vertice posso associare al massimo 3 angoli (esaedro) la cui somma è $90°\cdot 3 = 270°$. Se associo 4 quadrati ad un vertice ottengo 360° formando quindi un piano, pertanto non è possibile costruire il solido.
- Se utilizziamo **pentagoni regolari** ad un vertice posso associare al massimo 3 angoli (dodecaedro) la cui somma è $108°\cdot 3 = 324°$. Se associo 4 pentagoni equilateri ad un vertice ottengo 432°, pertanto non è possibile costruire il solido.

8. Insiemi e funzioni

La Teoria degli insiemi

La teoria degli insiemi è una branca della matematica creata principalmente dal matematico tedesco **Georg Cantor** alla fine del XIX secolo. Inizialmente controversa, la teoria degli insiemi è arrivata ad avere il ruolo di teoria fondamentale nella matematica moderna, molte volte utilizzata per giustificare le assunzioni fatte riguardo all'esistenza dei numeri e delle loro proprietà. Le formulazioni formali della teoria degli insiemi hanno giocato anche un ruolo fondamentale nel rigore matematico delle dimostrazioni. Mentre i concetti basilari della teoria degli insiemi sono usati ovunque in matematica.
La figura di **Cantor** è rimasta famosa per due aspetti, cioè per avere introdotto "**la teoria degli insiemi**", e per essere stato poco compreso nel suo tempo. In realtà il concetto di insieme è presente da sempre nella matematica. Precisamente Cantor ha sviluppato il concetto di **corrispondenza biunivoca** tra insiemi (finiti o infiniti), che porta alla definizione dei **numeri cardinali infiniti**. La sua opera porta alcune profonde rivoluzioni concettuali. La più importante è che ci sono *diversi gradi di infinito*. Il concetto di infinito non è più lo stesso dopo l'opera di Cantor.
La teoria degli insiemi viene presa come linguaggio fondante negli "**Eléments de Mathématique**" di **Bourbaki** ed entra prepotentemente nella didattica negli anni '60. Si tratta di un linguaggio con cui si vuole permeare tutta la matematica dalle fondamenta. Si riferisce agli elementi di Euclide, e nel primo libro si introducono concetti diventati poi di uso corrente, come **unione, intersezione, funzione (**iniettiva e suriettiva**), relazione di equivalenza**.
I concetti basilari della teoria degli insiemi sono "**insieme**" e "**appartenenza**". Un insieme è pensato come una collezione di oggetti, chiamati elementi (o membri) dell'insieme. Gli elementi di un insieme sono oggetti matematici qualsiasi, e in particolare possono anche essere altri insiemi. gli insiemi si indicano con la lettera maiuscola mentre gli elementi con la lettera minuscola dell'alfabeto. Denotando gli insiemi con le lettere maiuscole e gli elementi tramite le minuscole potremo pertanto identificare un insieme tramite la $A = \{a, b, c, \dots \}$ oppure $A = \{a_1, a_2, , \dots , a_n , \dots \}$ con n intero positivo. Un insieme è pertanto individuato dai suoi elementi, affermazione questa che costituisce il **principio di estensione**.
Inoltre un insieme può essere identificato dalla scrittura $A = \{x \mid P(x)\}$ che si legge come "A è l'insieme degli x per cui `e vera la proprietà P(x)". Assegnare quindi una proprietà P(x) significa che esiste un insieme A i cui elementi x obbediscono a P(x), affermazione questa che costituisce il cosiddetto **principio di astrazione**. Se un elemento a appartiene all'insieme A si scrive $a \in A$ e si legge "a appartiene ad A". Si possono costruire infiniti insiemi che hanno caratteristiche diverse.

La nozione di cardinalità

L'idea di Cantor, che rese la teoria degli insiemi un nuovo campo di studio, è stata quella di affermare che due insiemi *A* e *B* hanno lo stesso numero di elementi cioè la stessa **cardinalità**, se esiste un modo di

associare gli elementi di *A* con gli elementi di B (concetto di *funzione biunivoca o biettiva* tra A e B). Due insiemi che possano essere messi in corrispondenza biunivoca si dicono equipotenti (oppure si dice che hanno la **stessa cardinalità**).
Un insieme A si dice numerabile se **A** e **N** sono equipotenti, ad esempio l'insieme dei quadrati perfetti è numerabile, come anche l'insieme dei numeri interi **Z** è numerabile. Ogni sottoinsieme infinito di un insieme numerabile è numerabile. Si dimostra (primo metodo diagonale di Cantor) che l'insieme **N** dei numeri naturali ha la stessa cardinalità dell'insieme **Q** dei numeri razionali, per tali motivo entrambi gli insiemi sono detti numerabili, anche se **N** è un sottoinsieme proprio di **Q**.
Diversamente si dimostra che l'insieme **R** dei numeri reali non ha la stessa cardinalità di **N** o **Q** (secondo metodo diagonale di Cantor), ma una maggiore, pertanto R è detto non numerabile. Cantor fornì due dimostrazioni che sfruttano quella che è nota come costruzione diagonale, la sua teoria benché "ingenua" ha avuto una straordinaria influenza e innumerevoli applicazioni in molti settori matematica oltre che della logica.
Cantor costruì inoltre una gerarchia infinita di insiemi infiniti, i numeri ordinali e cardinali. Questo procedimento era controverso ai suoi tempi, e aveva l'opposizione del finitista *Leopold Kronecker*, ma oggi non c'è disaccordo significativo fra i matematici sulla correttezza delle idee di *Cantor*.

Procedimenti caratteristici del pensiero matematico (concetti primitivi, assiomi, definizioni, teoremi e dimostrazioni).
La teoria degli Insiemi fu inizialmente fu sviluppata quella che ora è chiamata teoria "ingenua" o "intuitiva" degli insiemi detta appunto Teoria ingenua degli insiemi. Lasciando la possibilità di eseguire qualsiasi operazione sugli insiemi senza restrizioni si arrivava ad alcuni paradossi tra cui il **paradosso di Russell**.

Paradosso di Russell
Tra i paradossi più famosi che generarono contraddizioni all'interno della teoria "ingenua" degli insiemi spicca il celebre paradosso di Cantor: "*dato l'insieme S := {A | A ∉ A} degli insiemi che non appartengono a sé stessi, se S appartiene a sé stesso, allora non vi appartiene, portando a una contraddizione, così S non può appartenere a sé stesso. Ma allora S dovrebbe appartenere a sé stesso, quindi si arriva ad un assurdo, cioè una contraddizione all'interno della teoria di Cantor*".

Gli assiomi della teoria "ingenua" di Cantor
Per affrontare questi problemi si dovette ricostruire la teoria degli insiemi, questa volta con un approccio assiomatico.
Gli assiomi della moderna teoria degli insiemi, posti nella loro forma finale da Skolem, costituiscono la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel (ZF) che insieme all'assioma della scelta, costituisce il sistema risultante detto ZFC (Zermelo-Fraenkel-Choice). Tutti gli oggetti che il sistema ZFC tratta sono insiemi. In particolare, ogni elemento di un insieme è esso stesso un insieme. In particolare numeri, devono essere