SIMULAZIONE 1
Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti

Tema di: MATEMATICA

PROBLEMA 1

Date le funzioni

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2} \quad n \in \mathbb{N}$$

a. Determinare i punti di estremo relativo ed assoluto, verificando che tali funzioni possiedono un punto di massimo assoluto ed uno di minimo assoluto.
b. Tracciare il grafico di $f_n(x)$ stabilendo come esso di modifica al variare di $n \in \mathbb{N}$.
c. Calcolare i limiti

$$\lim_{n \to +\infty} x_n \qquad e \qquad \lim_{n \to +\infty} y_n$$

dove x_n è l'ascissa positiva del punto di massimo assoluto ed y_n è la sua ordinata.
d. Si calcoli il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

e posto n = 2, si determini il volume del solido generato dalla rotazione intorno all'asse y della parte di piano delimitata dalla retta x = 1 e dal grafico di $f_2(x)$.
(Non si richiede di svolgere l'integrale risolutivo).

PROBLEMA 2

Data la curva C di equazione

$$C: \quad 4x^4 - 4x^2 + y^2 = 0$$

a. Verificare che tale curva può essere scritta nella forma: $y = \pm f(x)$.
b. Si scriva C in forma parametrica e si trovino le rette tangenti a C nell'origine.
c. Si tracci il grafico di C verificando che esso è contenuto nel quadrato Q

$$Q = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \ \wedge \ -1 \leq y \leq 1\}$$

d. Calcolare la probabilità che preso a caso un punto di Q, questo cada nella parte di piano racchiusa da C.

QUESITI

1. Determinare, se esistono, gli estremi assoluti della funzione $f(x) = x^3 + 2x + 1$, nell'intervallo
I = [– 3;0].

2. Determinare il volume del solido avente semicerchi per sezioni perpendicolari al piano di base

$$B = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4 \ \wedge \ 0 \leq y \leq \sqrt{x}\right\}$$

3. Scrivere l'equazione del piano per P(0;1;1) e parallelo alle rette r: $x - 1 = y + z - 1 = 0$ ed

$$s: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = t - 3 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

4. Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n$ dove a_n è la successione definite per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} \end{cases}$$

5. Si lanciano in contemporanea due dadi equilibrati per dieci volte. Qual è la probabilità che almeno per due volte escano due facce uguali?

6. Dimostrare che la funzione $f(x) = e^x + 2\,\mathrm{arctg}\,x$ è invertibile e si calcoli $(f^{-1})'(e + \frac{\pi}{2})$

7. Scrivere l'equazione della circonferenza inscritta nel quadrato $Q = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$

8. Sia f(x) una funzione continua con $f(0) = 1$ ed $f'(0) = 1$. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt - x}{1 - \cos 2x}$$

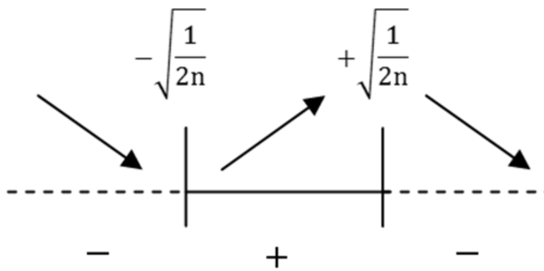
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 350 Art. 18 comma 8).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

SVOLGIMENTO PROBLEMA 1

a. La funzione $f_n(x)$ è una funzione dispari, definita in $\mathbb{R}$ ed inoltre vale $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.
Il calcolo della derivata prima risulta

$$f_n{}'(x) = ne^{-nx^2} - 2n^2x^2e^{-nx^2} = n(1-2n^2x^2)e^{-nx^2}$$

$$f_n{}'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-2n^2x^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{\frac{1}{2n}} < x < +\sqrt{\frac{1}{2n}}$$



pertanto, la funzione ammette un max assoluto nel punto di ascissa

$$x_n = \sqrt{\frac{1}{2n}}$$

e di ordinata

$$y_n = f_n(x_n) = n\sqrt{\frac{1}{2n}}e^{-n\cdot\frac{1}{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}}e^{-\cdot\frac{1}{2}}$$

Analogamente la funzione ammette un minimo assoluto nel punto di ascissa

$$x_n' = -\sqrt{\frac{1}{2n}}$$

e di ordinata

$$y_n' = f_n(x_n') = -\sqrt{\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}}$$

Il grafico di tale funzione può essere tracciato dopo lo studio della derivata seconda

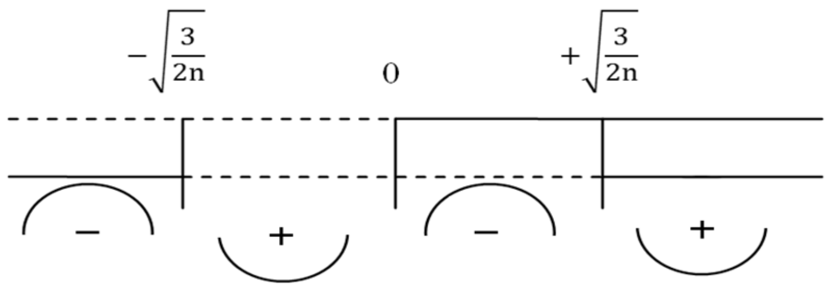
Studio della derivata seconda

$$f_n''(x) = n(-4nx)e^{-nx^2} - 2n^2x(1-2nx^2)e^{-nx^2} =$$

$$= n\left[-4nx - 2nx(1-2nx^2)e^{-nx^2}\right]$$
$$= n^2(-4x - 2x + 4x^3n)e^{-nx^2} =$$

$$= 2n^2x(2x^2n - 3)e^{-nx^2}$$

$$f_n''(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(2x^2n-3) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{\frac{3}{2n}} < x < +\sqrt{\frac{3}{2n}}$$



$$f_n\left(-\sqrt{\frac{3}{2n}}\right) = -n\sqrt{\frac{3}{2n}}e^{-\frac{3}{2}} = -\sqrt{\frac{3n}{2}}e^{-\frac{3}{2}}$$

$$f_n(0) = 0$$

$$f_n\left(\sqrt{\frac{3}{2n}}\right) = n\sqrt{\frac{3}{2n}}e^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3n}{2}}e^{-\frac{3}{2}}$$

pertanto, la funzione ammette tre punti di flesso

$$F_1\left(-\sqrt{\frac{3}{2n}}; -\sqrt{\frac{3n}{2}}e^{-\frac{3}{2}}\right) \qquad F_1(0;0) \qquad F_1\left(\sqrt{\frac{3}{2n}}; \sqrt{\frac{3n}{2}}e^{-\frac{3}{2}}\right)$$

b. Si può ora tracciare il grafico