Concorso

MINISTERO dell'INTERNO

1248 Funzionari

49 Funzionari statistici (cod. C.1)

Manuale integrativo con le **materie specifiche** del profilo **TEORIA** e **QUIZ COMMENTATI**

per la **prova scritta** e **orale**

NLD CONCORSI

Capitolo 19
Matematica finanziaria e matematica attuariale

SOMMARIO:

1. Matematica finanziaria

La matematica finanziaria considera il denaro come se fosse un bene qualunque, quindi il suo utilizzo commerciale è finalizzato ad un guadagno derivante dal suo utilizzo. Le basi di questo utilizzo sono:

- *l'interesse*
- *il capitale*
- *il tasso di interesse*
- *il montante*

Il **Capitale** è la quantità di denaro che viene considerata in uso e di solito la si indica con C. L'**Interesse** è il compenso spettante a chi dà in uso il proprio denaro e verrà indicato con I. Il **Tasso di interesse** è la percentuale di interesse sull'unità di capitale, cioè l'interesse sulla somma di un euro. Lo indicheremo con i (i lettera minuscola). Il **Montante** la somma M che viene percepita alla fine del periodo considerato, cioè la somma del capitale iniziale e dell'interesse ottenuto. In generale M = C + I.
Ovviamente l'Interesse risulta proporzionale al tempo, ciò significa che se raddoppio il tempo deve raddoppiare anche l'interesse, se triplico il tempo devo triplicare anche l'interesse, pertanto l'interesse I è direttamente proporzionale al tempo intercorso fra il versamento ed il prelievo ed al capitale impiegato, il che si traduce matematicamente nella formula:

$$\mathbf{I = C \cdot i \cdot t}$$

Il tasso i di interesse viene indicato indifferentemente sia come frazione che come decimale. L'unità di tempo, a meno di diverse indicazioni, è solitamente di 1 anno. Vengono usati anche tassi specifici per periodi diversi dall'anno (*tasso mensile, bimestrale, trimestrale,* semestrale).
Utilizzando l'**interesse semplice**, parleremo di **regime ad interesse semplice** oppure **capitalizzazione semplice** e, questo regime, di solito viene usato per periodi brevi (operazioni a breve scadenza). Ad esempio per considerare un tempo di 60 giorni, è possibile considerare la frazione 50/360 utilizzando l'anno commerciale oppure civile la frazione 45/365 utilizzando l'anno civile (365 gg).

► 1.1. Capitalizzazione semplice

Il **Montante** è ciò che viene restituito alla fine del periodo di capitalizzazione a chi ha dato in uso il proprio denaro, quindi il montante sarà dato dal capitale iniziale più l'interesse maturato:

$$\mathrm{M = C + I}$$

essendo l'interesse I è dato da

$$I = C \cdot i \cdot t$$

si ottiene

$$M = C + C\,i\,t$$

Raccolgo **C** ed ottengo la nota formula:

$$M = C(1 + it)$$

dove il fattore $1 + it$ si chiama **fattore di capitalizzazione semplice** e corrisponde al montante sulla somma di 1 euro impiegata per 1 anno.

► 1.2. Formule inverse in regime di Capitalizzazione semplice

Utilizzando le formule inverse è possibile ricavare il valore del capitale conoscendo il montante, il tasso ed il tempo, infatti risulta

$$C = \frac{M}{1 + it}$$

tale formula servirà a calcolare la somma che bisogna utilizzare ad un dato tasso e per un dato tempo per costituire un montante M. Il termine

$$\frac{1}{1 + it}$$

si chiama **fattore di sconto o di attualizzazione**, fattore moltiplicativo che permette di ritornare dal montante al Capitale. Il calcolo del numero di anni t si esprime mediante la seguente formula inversa:

$$t = \frac{M - C}{Ci} = \frac{I}{Ci} > 0$$

quantità che ovviamente risulta positiva. Il calcolo del tasso di interesse i invece si esprime mediante la seguente formula inversa:

$$i = \frac{M - C}{Ct} = \frac{I}{Ct} > 0$$

Il regime dell'**interesse semplice** è in genere utilizzato per operazioni finanziarie di breve durata (non oltre l'anno o i 18 mesi). Il **frutto** è corrisposto una sola volta alla scadenza dell'operazione finanziaria e l'interesse che matura prima della scadenza non capitalizza (non diventa capitale), e poiché dà frutto solo il capitale, l'interesse è sterile e non genera altro interesse. Questo regime **non è favorevole** al creditore che, durante la vita del prestito, non incassa e non capitalizza l'interesse, di fatto il mancato incasso rende impossibile il consumo o il reinvestimento dell'interesse ed inoltre la mancata capitalizzazione non compensa il creditore dell'indisponibilità materiale dell'interesse maturato.
Se siamo in regime di interesse semplice applicato a operazioni di breve termine e l'unità di tempo è inferiore all'anno (mesi o giorni), allora il tasso annuale è moltiplicato per il rapporto tra l'unità di misura temporale e l'anno espresso in mesi o giorni, quindi per effetto della variazione temporale ridotta, l'equazione del montante diviene:

$$M = C\left(1 + i \cdot \frac{m}{12}\right) \qquad \text{con } m = \text{numero mesi}$$

$$M = C(1 + i \cdot \frac{g}{360}) \qquad \text{con } g = \text{numero giorni}$$

► 1.3. Capitalizzazione composta

Al termine di un anno (commerciale o civile) che sia viene corrisposto un interesse, che di solito non viene ritirato, ma viene aggiunto al capitale venendo così a formare il nuovo capitale su cui calcolare l'interesse per il prossimo anno e così di anno in anno. Tale metodo viene chiamato **regime ad interesse composto** e, di solito, viene utilizzato per periodi superiori all'anno.
Supponiamo di considerare l'anno come misura intera, cioè di versare, ad esempio, in banca un capitale il primo gennaio

- *Dopo 1 anno il Montante risulta:* $M_1 = C(1 + i)$
- *Dopo 2 anni il Montante risulta:* $M_2 = M_1(1 + i) = C(1 + i)^2$
- *Dopo 3 anni il Montante risulta:* $M_3 = M_2(1 + i) = C(1 + i)^3$
- *Dopo t anni il Montante risulta:* $M_t = M_{t-1}(1 + i) = C(1 + i)^t$

In regime di **interesse composto** è chiaro che la capitalizzazione periodica degli interessi genera ulteriori interessi. La differenza rispetto al regime dell'interesse semplice risiede nel fatto che il primo non consente capitalizzazione.

► 1.4. Formule inverse in regime di Capitalizzazione composta

Possiamo ricavarne le **formule inverse**, ad esempio per calcolare i termini incogniti C, i e t considerando noti gli altri 3 dati. Noti i valori del montante M_t, del tasso i e del tempo t, è possibile ottenere il valore di C o capitale da investire. C, esprime il valore attuale o valore al tempo t = 0, del capitale a scadenza M_t. Il valore M_t del capitale disponibile in una data futura t > 0, si ottiene attualizzandolo mediante il fattore di sconto $(1 + i)^t$, pertanto risulta:

$$C = \frac{M_t}{(1+i)^t}$$

Noti il montante M_t, il capitale da investire C e il tasso d'interesse i, è possibile calcolare il tempo di durata t dell'operazione finanziaria, mediante la seguente formula:

$$t = \log_{1+i}\left(\frac{M_t}{C}\right) \qquad \text{oppure} \qquad t = \frac{\ln\left(\frac{M_t}{C}\right)}{\ln(1+i)}$$

Infine noti i valori del capitale C, del montante M e del tempo t, è possibile stimare il tasso i di interesse, mediante la seguente formula:

$$i = \sqrt[t]{\frac{M_t}{C}}$$

Se il numero di anni su cui calcoliamo il montante non è intero ma **frazionario**, allora abbiamo due modi diversi per calcolare il montante. Il più semplice e vantaggioso è quello **lineare**. Si cioè tratta di utilizzare per il numero intero di anni la capitalizzazione composta e, per la frazione di anno residua, la capitalizzazione semplice.

Chiamiamo M_{n+f} **il montante finale** essendo n un numero intero di anni ed f una frazione di anno:

- *dopo n anni Il montante risulta:* $M_n = C(1+i)^n$
- *dopo una frazione residua di anno f Il montante risulta:* $M_{n+f} = M_n(1+if)^n = C(1+i)^n(1+if)^n$

dove il termine f sta per $\frac{m}{12}$ (m= numero dei mesi) oppure per $\frac{g}{360}$ (g= numero dei giorni).

Pertanto se la capitalizzazione è annuale e il numero degli anni è intero, l'equazione del montante è data da:

$$M_n = C(1+i)^n$$

con n = numero anni interi, se invece il numero di anni non è intero ma frazionato **n,f** cioè n anni ed f frazione residua relativa ai mesi, allora l'equazione diventa:

$$M_{n+f} = C(1+i)^n(1+i)^f = C(1+i)^{n+f}$$

con f = $\frac{m}{12}$ (m= numero dei mesi). La somma finale è definita **montante con formula esponenziale:**

$$M_{n+f} = C(1+i)^{n,f}$$

In modo analogo si può utilizzare l'equazione del **montante con formula lineare** nel modo seguente:

$$M_{n+f} = C(1+i)^n(1+if)$$

inoltre è possibile provare che nel primo caso si ottiene un montante minore, infatti risulta:

$$C(1+i)^{n,f} < C(1+i)^n(1+if)$$

Inoltre si osservi che se il periodo di capitalizzazione è inferiore all'anno, allora si parla di **capitalizzazione frazionata** e il **tasso annuo** i si converte in **tasso periodale** (1/m) e si moltiplica la durata per m o numero di capitalizzazioni all'anno. Si osservi che il tasso i è convertibile m volte l'anno:

$$M_{n+f} = C\left(1 + i \cdot \frac{1}{m}\right)^{n \cdot m}$$

► 1.5. La capitalizzazione continua

In regime di capitalizzazione frazionata consideriamo il caso in cui la frequenza m tenda all'infinito, in tal caso la capitalizzazione degli interessi avviene istante per istante o in modo continuo, pertanto si parla appunto di **capitalizzazione continua**.

$$M = \lim_{m\to\infty} C\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot t} = C\cdot \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot t} = C\cdot e^{it}$$

da cui è possibile ricavare le rispettive formule inverse. Il **fattore di montante** nella capitalizzazione continua è dato dalla funzione esponenziale e^{it} con e = 2,7183.

▶ 1.6. Formule inverse in regime di Capitalizzazione continua

Noti il montante M, come la scadenza t e il tasso i di interesse, è possibile calcolare il capitale C da investire o valore attuale di M al tempo t = 0, la formula inversa è la seguente:

$$M = C\cdot e^{it} \qquad \rightarrow \qquad C = \frac{M}{e^{it}} = Me^{-it}$$

Noti il capitale iniziale C, il montante M e il tempo t di durata dell'investimento, è possibile calcolare il tasso i di interesse utilizzando la seguente formula inversa:

$$M = C\cdot e^{it} \quad \rightarrow \quad e^{it} = \frac{M}{C} \quad \rightarrow \quad it = \ln\left(\frac{M}{C}\right) \quad \rightarrow \quad i = \frac{1}{t}\cdot\ln\left(\frac{M}{C}\right)$$

Infine noti il capitale iniziale C, il montante M e il tasso i di interesse, è possibile calcolare il tempo t di durata dell'investimento, utilizzando la seguente formula inversa:

$$t = \frac{1}{i}\cdot\ln\left(\frac{M}{C}\right)$$

▶ 1.7. Rendite annue

Illustriamo ora alcuni elementi per la valutazione delle rendite. Consideriamo che il prezzo di un titolo con cedola fissa può essere ottenuto con il montante o con il valore attuale di una rendita temporanea, posticipata, con rata costante annua o frazionata.
Si definisce allora **rendita** un insieme di prestazioni con scadenze diverse. L'investimento in un titolo può essere espresso dalla somma di una rendita più il capitale rimborsato a scadenza. Della rendita e del capitale consideriamo ora sia il montante che il valore attuale.

▶ 1.8. Calcolo del montante di una rendita annua

Il **montante** di una rendita annua a rate costanti C, immediata posticipata è dato da

$$M_{n,i} = C + C(1+i) + \ldots + C(1+i)^{n-2} + C(1+i)^{n-1}$$

che rappresenta la somma dei primi n termini di una progressione geometrica di primo termine $C = a_1$ e di ragione $q = 1 + i$, pertanto essendo tale somma esprimibile con la seguente regola:

$$M_{n,i} = a_1 + a_1 + \cdots + a_1 = a_1\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

allora risulta che:

$$M_{n,i} = C\cdot\frac{(1+i)^n - 1}{1+i-1} = C\cdot\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

▶ 1.9. Calcolo del valore attuale di una rendita annua

Se invece del montante si vuole calcolare il **valore attuale** o prezzo del titolo, nell'ipotesi che il tasso i sia il tasso di rendimento, si deve calcolare il valore attuale della rendita costituita dalle cedole e sommare il valore attuale del valore di rimborso. Nell'ipotesi che le cedole siano annuali la rendita è annua a rate costanti, di n anni, immediata e posticipata, allora risulta che:

$$VA_{n,i} = C(1+i)^{-1} + C(1+i)^{-2} + \ldots + C(1+i)^{-(n-1)} + C(1+i)^{-n}$$

che rappresenta la somma dei primi n termini di una progressione geometrica di primo termine che si esprime con $C(1+i)^{-1} = b_1$ e di ragione $q = (1+i)^{-1}$, pertanto essendo tale somma esprimibile con la seguente regola:

$$VA_{n,i} = b_1 + b_1 + \cdots + b_1 = b_1\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

allora risulta che: