

 **READY TEST**

Ingegneria **2026** TOLC-I



SCHEDA FACILITATE
rendono i concetti più
accessibili



SIMULATORE
con punteggio e
analisi personalizzata



MAPPE CONCETTUALI
per memorizzare più
velocemente



PODCAST
per studiare anche
in movimento

Manuale di Teoria e Quiz

con **simulazioni commentate delle prove**
per la preparazione ai **test di ammissione universitari**

NLD
CONCORSI

5.

Dinamica del corpo rigido

SOMMARIO:

1. Dinamica dei sistemi di punti materiali - 1.1. Centro di massa - 1.2. Riferimento del centro di massa - 1.3. Proprietà del centro di Massa - 1.3.1. Quantità di moto totale - 1.3.2. Teorema del moto del centro di massa - 1.3.3. La prima equazione cardinale - 2. Dinamica del corpo rigido - 2.1. Seconda legge di Newton per un corpo rigido - 2.2. Centro di massa di un corpo rigido

1. Dinamica dei sistemi di punti materiali

Il punto materiale è un'astrazione che sta ad indicare un punto geometrico a cui viene attribuita una massa. La maggior parte degli oggetti reali sono invece costituiti da un insieme di punti materiali o da un continuo di punti materiali. Nonostante questa sia in genere una notevole complicazione, vedremo come un sistema di punti materiali si muove come se tutta la sua massa fosse concentrata in un solo punto particolare detto **centro di massa**. Questa proprietà permetterà di ricondurre la descrizione del moto di un sistema di punti al moto di un **punto materiale**.

1.1. Centro di massa

Nello studio della dinamica dei sistemi di punti materiali risulta utile introdurre il concetto di centro di massa. La posizione del centro di massa è definita da una media pesata delle posizioni di ciascun punto materiale; ad esempio nel caso di 2 punti materiali nello spazio definiamo le coordinate x , y , z del C.M. come

$$\begin{cases} x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \\ y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \\ z_{CM} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

Per semplicità scegliamo di studiare il fenomeno solo lungo l'asse delle x considerando solo un riferimento coincidente con una delle due masse ad esempio m_1 equindi $x_1 = 0$. In questo caso

$$x_{CM} = \frac{m_2 x_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow x_2 = \frac{(m_1 + m_2)x_{CM}}{m_2}$$

si possono avere i seguenti casi:

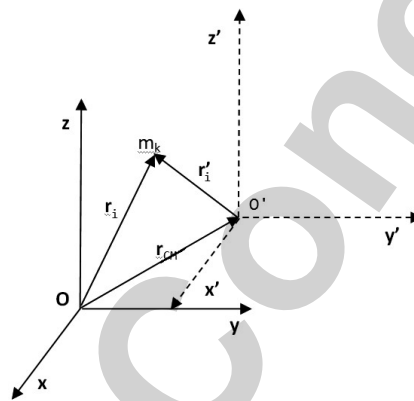
- $m_1 \ll m_2$ allora $x_{CM} = x_2$ ed $x_1 = 0$
- $m_1 \gg m_2$ allora $x_{CM} = 0 = x_1$
- $m_1 = m_2$ allora $x_{CM} = \frac{x_1 + x_2}{2}$

In definitiva il centro di massa tende a disporsi dove vi è più concentrazione di massa del sistema di punti. In generale dato un sistema di N punti materiali se consideriamo i vettori posizione \vec{r}_i (con $i = 1, \dots, N$) rispetto ad un riferimento $Oxyz$ la posizione del centro di massa è quindi localizzata dal raggio vettore posizione risultante

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

1.2. Riferimento del centro di massa

Onde mettere in evidenza le proprietà dinamiche del centro di massa risulta utile introdurre, oltre al riferimento inerziale del laboratorio un sistema di riferimento in moto traslatorio rispetto al precedente e con origine nel punto C . Questo riferimento è dotato di moto traslatorio con la stessa velocità del centro di massa (ed in genere non è un riferimento inerziale). I vettori posizione e velocità della k -esima particella nel laboratorio e nel centro di massa sono legate dalle relazioni (con $i = 1, \dots, N$):



$$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}'_i$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i$$

$$\vec{a}_i = \vec{a}_{CM} + 0$$

1.3. Proprietà del centro di massa

1.3.1. Quantità di moto totale

(I proprietà dinamica del centro di massa)

Se poniamo $M = \sum_{i=1}^N m_i$ risulta

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$M \vec{r}_{CM} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

28. When do you usually have _____ breakfast?

- A. a
- B. the
- C. any
- D. first
- E. -

29. This is our son James and _____ are our twin daughters, Sabrina and Jessica.

- A. their
- B. that
- C. them
- D. these
- E. this

30. Those _____ are very efficient! What about a promotion?

- A. policeman
- B. policemen
- C. policemans
- D. policemen
- E. policemen's

31. Se x è un numero reale *negativo*, allora

- A. $x \cdot |x| > 0$
- B. $\frac{x}{|x|} > 0$
- C. $x + |x| > 0$
- D. $x - |x| < 0$
- E. $-x \cdot |x| < 0$

32. un polinomio $P(x)$ è divisibile per $x^2 - 4$, allora

- A. $P(x)$ non ha radici reali
- B. 2 non è una radice di $P(x)$
- C. 2 non è una radice di $P(x)$
- D. $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ sono certamente radici di $P(x)$
- E. 2 e -2 sono certamente radici di $P(x)$

33. Indicato con x un angolo la cui misura in radianti può variare tra 0 e 2π , l'equazione

$\sin x + \cos x = 0$ ammette

- A. quattro soluzioni
- B. due soluzioni
- C. una soluzione
- D. otto soluzioni
- E. nessuna soluzione

34. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy , si consideri la retta r di equazione

$$y = \frac{2x + 1}{-3}$$

La retta passante per il punto di coordinate (1, 1) e perpendicolare ad r ha equazione

- A. $y = \frac{2x+1}{3}$
- B. $y = \frac{3x-1}{2}$
- C. $y = \frac{3x+1}{4}$
- D. $y = \frac{2x-5}{3}$
- E. $y = \frac{2x-5}{-3}$

35. Sapendo che l'affermazione "Tutti i sabati vado in pizzeria e poi al cinema" è falsa, se ne deduce che

- A. qualche sabato non vado in pizzeria o al cinema
- B. tutti i sabati non vado in pizzeria o al cinema
- C. qualche sabato non vado né in pizzeria né al cinema
- D. tutti i sabati non vado né in pizzeria né al cinema
- E. tutti i giorni vado in pizzeria e al cinema

36. Siano α e β due angoli legati fra di loro dalla relazione $\beta = \pi - \alpha$. Quale delle seguenti uguaglianze è vera?

- A. $\sin \alpha + \sin \beta = 0$
- B. $\cos \alpha + \cos \beta = -1$
- C. $\tan \alpha = \tan \beta$
- D. $\cos \alpha = \cos \beta$
- E. $\tan \alpha + \tan \beta = 0$

37. L'età media dei partecipanti ad una festa è di 24 anni. Se l'età media degli uomini è 28 anni e quella delle donne è 18 anni, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne?

- A. 3/2
- B. 2
- C. 14/9
- D. 4/3
- E. 9/14

38. Un triangolo rettangolo ha perimetro lungo 12 cm. Allora i suoi due cateti sono lunghi

- A. 1 e 2 cm
- B. 2 e 3 cm
- C. 3 e 4 cm

si usano in questo contesto generico, a meno che non si specifichi qualcosa di particolare (es. "a big lunch").

26. Risposta corretta: A

"Over there" indica qualcosa di **lontano**, quindi serve un dimostrativo plurale di distanza: "those" (A). "They" (B) è un pronome soggetto, non un dimostrativo; "them" (C) è complemento oggetto; "these" (D) indica vicinanza; "their" (E) è un possessivo.

27. Risposta corretta: C

La risposta "Once a year" indica **frequenza**, quindi la domanda corretta è "How often" (C). "How many times" (A) potrebbe funzionare ma è meno naturale in questo contesto; "How long" (B) riguarda la durata; "How much" (D) la quantità; "How old" (E) l'età.

28. Risposta corretta: E

Anche con "breakfast" si usa normalmente **nessun articolo** quando si parla in generale, quindi (E). "A" (A) o "the" (B) si userebbero solo in casi specifici; "any" (C) non è adatto; "first" (D) non ha senso in questa struttura.

29. Risposta corretta: D

La frase introduce più persone **vicine** a chi parla, quindi si usa il dimostrativo plurale "these" (D). "Their" (A) è possessivo; "that" (B) è singolare; "them" (C) è complemento oggetto; "this" (E) è singolare.

30. Risposta corretta: D

Il plurale di "policeman" è irregolare: **policemen** (D). "Policeman" (A) è singolare; "policemans" (C) e "policemens" (B) sono forme scorrette; "policemen's" (E) è un possessivo, non richiesto qui.

31. Risposta corretta: D

Poiché x è un numero reale negativo, il suo valore assoluto è il suo opposto, quindi $|x| = -x$. Sostituendo, si ottiene $x - |x| = x - (-x) = 2x$, e dato che $x < 0$, anche $2x < 0$, quindi l'affermazione (D) è vera. In (A), $x \cdot |x|$ è il prodotto tra un numero negativo e uno positivo, quindi risulta negativo, non positivo. In (B), la frazione $\frac{x}{|x|}$ vale -1 , quindi non può essere maggiore di zero. In (C), $x + |x| = x + (-x) = 0$, perciò non è maggiore di zero. In (E), $-x$ è positivo e $|x|$ è positivo, quindi il loro prodotto è positivo, non minore di zero.

32. Risposta corretta: E

Essere divisibile per $x^2 - 4$ significa che il polinomio contiene quel fattore. Poiché $x^2 - 4$ si scompone in $(x - 2)(x + 2)$, segue che il polinomio $P(x)$ si annulla sicuramente per $x = 2$ e per $x = -2$. Per questo motivo (E) è corretta. Le affermazioni (B) e (C) dicono il contrario di ciò che deve accadere, quindi sono false. In (D) compaiono invece $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$, che sarebbero radici di $x^2 - 2$, non di $x^2 - 4$. Anche (A) è falsa, perché un polinomio divisibile per $x^2 - 4$ ha certamente almeno due radici reali.

33. Risposta corretta: B

L'equazione è $\sin x + \cos x = 0$, cioè $\sin x = -\cos x$. Se $\cos x \neq 0$, si può dividere per $\cos x$ e si ottiene $\tan x = -1$. Nell'intervallo $[0, 2\pi]$ questa equazione è verificata per $x = \frac{3\pi}{4}$ e $x = \frac{7\pi}{4}$, quindi le soluzioni sono due. Perciò (B) è corretta. Non sono quattro (A), né una sola (C), né otto (D), e certamente non è vero che non ci siano soluzioni (E).

34. Risposta corretta: B

La retta data può essere riscritta come $y = \frac{2}{-3}x + \frac{1}{-3}$, cioè $y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$. Il suo coefficiente angolare è quindi $-\frac{2}{3}$. Una retta **perpendicolare** ha coefficiente angolare uguale al reciproco cambiato di segno, cioè $\frac{3}{2}$. Passando per il punto $(1, 1)$, la sua equazione è

$$y - 1 = \frac{3}{2}(x - 1)$$

da cui

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Questa corrisponde alla risposta (B), anche se nel testo appare scritta in forma poco leggibile. Le altre opzioni non hanno il coefficiente angolare corretto oppure non passano per il punto assegnato.

35. Risposta corretta: A

L'affermazione "**Tutti i sabati vado in pizzeria e poi al cinema**" ha la struttura logica "per ogni sabato, accadono entrambe le cose". La sua negazione è: **esiste almeno un sabato in cui almeno una delle due cose non accade**. Questo è esattamente ciò che esprime (A): **qualche sabato non vado in pizzeria o al cinema**. La (B) è troppo forte, perché parla di **tutti** i sabati. La (C) è anch'essa troppo forte, perché richiede che in almeno un sabato non si vada **né** in pizzeria **né** al cinema, mentre basta che manchi anche solo una delle due azioni. La (D) è ancora più forte, e (E) non ha alcun legame logico con la negazione della frase data.

36. Risposta corretta: E

Se $\beta = \pi - \alpha$, allora β è l'angolo supplementare di α . Vale la nota relazione trigonometrica

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha.$$

Quindi $\tan \beta = -\tan \alpha$ e di conseguenza

$$\tan \alpha + \tan \beta = 0.$$

Per questo la Risposta corretta: è (E). Invece $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$, quindi in (A) si avrebbe $2\sin \alpha$, non zero in generale. Inoltre $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, quindi (D) è falsa e in (B) la somma $\cos \alpha + \cos \beta$ vale in realtà zero, non -1 . Anche (C) è falsa, perché $\tan \beta = -\tan \alpha$, non uguale a $\tan \alpha$ salvo casi particolari.

37. Risposta corretta: A

Indichiamo con u il numero degli **uomini** e con d il numero delle **donne**. La media complessiva è una **media ponderata**, quindi:

$$\frac{28u + 18d}{u + d} = 24.$$

Moltiplicando:

$$28u + 18d = 24u + 24d.$$

Portando i termini simili dallo stesso lato:

$$4u = 6d.$$

Dividendo per 2:

$$2u = 3d \Rightarrow \frac{u}{d} = \frac{3}{2}.$$